合肥市2021年高三第二次教学质量检测

数学试题（文科）参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	A	C	A	C	B	B	D	C	A	A

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $\sqrt{10}$　　14. $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$　　15. 2　　16. $\left(n+1\right)\cdot 2^{n-2}$

三、解答题：本大题共6小题，满分70分.

17. (本小题满分12分)

解：(1) 由正弦定理得 $2\sin A\cos B+2\sin B\cos A=c\sin C$，

$\therefore 2\sin\left(A+B\right)=c\sin C$，$\therefore 2\sin C=c\sin C$，

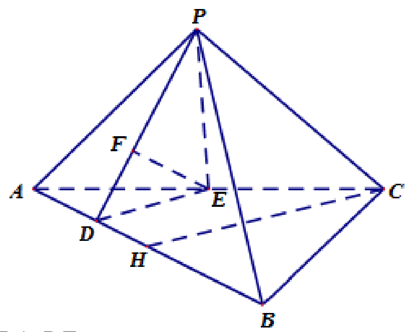
$\because \sin C\neq 0$，$\therefore c=2$. ······························6分

(2) $\because C=\dfrac{\pi}{3}$，$a+b=2\sqrt{2}$，

$\therefore$ 由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab=\left(a+b\right)^2-3ab=8-3ab=4$，解得 $ab=\dfrac{4}{3}$，

$\therefore \Delta ABC$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ····························12分

18. (本小题满分12分)



(1) 证明：如图，取 AB 的中点 H，连接 CH.

$\because BD=3AD$，$\therefore D$ 为 AH 的中点，$\therefore DE\ /\!/\ CH$.

$\because AC=BC$，$\therefore CH\perp AB$，$\therefore ED\perp AB$.

又 $\because$ 点 E 在平面 PAB 上的射影 F 在线段 PD 上，

$\therefore EF\perp$ 平面 PAB，$\therefore EF\perp AB$.

$\because EF\cap ED=E$，EF，$DE\subset$ 平面 PDE，

$\therefore AB\perp$ 平面 PDE. ································6分

(2) $\because AB\perp$ 平面 PDE，$\therefore AB\perp PE$.

$\because$ 点 E 为棱 AC 的中点，$PA=PC$，$\therefore PE\perp AC$.

又 $\because AC\cap AB=A$，AC，$AB\subset$ 平面 ABC，$\therefore PE\perp$ 平面 ABC，$\therefore PE\perp DE$.

$\because PA=PC=2$，$AC=BC=2\sqrt{2}$，$AC\perp BC$，

$\therefore PE=\sqrt{2}$，$DE=1$，$PD=\sqrt{3}$.

在 $Rt\Delta PDE$ 中，由 $Rt\Delta DEF\backsim Rt\Delta DPE$ 得，$DF=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore PD=3DF$，即 $PF=2FD$，

$\therefore S_{\Delta PAF}=\dfrac{2}{3}S_{\Delta PAD}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore V_{P-AEF}=V_{E-PAF}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta PAF}\cdot EF=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{9}$.

所以三棱锥 $P-AEF$ 的体积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{9}$. ··································12分

19.（本小题满分 12 分）

解：(1) 由 $y=c_1\cdot e^{c_2x}$ 得 $\ln y=c_2x+\ln c_1$，即 $z=c_2x+\ln c_1$，$\therefore c_2=\dfrac{\sum_{i=1}^{6}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(z_i-\overline{z}\right)}{\sum_{i=1}^{6}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\dfrac{6.73}{17.5}\approx 0.38$.

又$\because \overline{z}=c_2\overline{x}+\ln c_1$，$0.38\times 3.5+\ln c_1=2.85$，$\ln c_1=1.52$.

$\therefore \ln y=0.38x+1.52$，即 $y=e^{0.38x+1.52}$ 为所求的回归方程. ……………………………8 分

(2) 根据 (1) 回归方程得 $y=e^{0.38x+1.52}$. 当 $x=8$ 时，$y=e^{0.38\times 8+1.52}\approx 95.58$，$\dfrac{95.58}{1.82}\approx 52.52$，

据此可以判断 2021 年全球产生的数据量超过 2011 年的 50 倍，因此，这种判断是准确的. ………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

解: (1) 设椭圆的半焦距为 c，由题意得 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $a^2=2c^2$.

$\because$直径为 BD 的圆过点 $E\left(-a,0\right)$，$B\left(0,-b\right)$，$D\left(0,4\right)$，

$\therefore EB\perp ED$，即 $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}=0$，$\left(a,-b\right)\cdot\left(a,4\right)=0$，$\therefore a^2-4b=0$.

又$\because a^2=b^2+c^2$，解得 $a^2=8$，$b^2=4$，$\therefore$椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ……………………5 分

(2) 由题意知，直线 MN 的斜率存在，设其方程为 $y=kx+4$，$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$.

由 $\begin{cases} y=kx+4 \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 得 $\left(2k^2+1\right)x^2+16kx+24=0$，$\Delta=\left(16k\right)^2-4\times 24\times\left(2k^2+1\right)>0$，即 $k^2>\dfrac{3}{2}$.

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{16k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{24}{2k^2+1}$，

$\because A\left(0,2\right)$，$B\left(0,-2\right)$，$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$.

$\therefore$直线 AN 的方程为 $y=\dfrac{y_2-2}{x_2}x+2$，直线 BM 的方程为 $y=\dfrac{y_1+2}{x_1}x-2$（$x_1x_2\neq 0,-2<y_1,y_2<2$），

$\begin{cases} y=\dfrac{y_2-2}{x_2}x+2 \\ y=\dfrac{y_1+2}{x_1}x-2 \end{cases}$ 消去 x 得 $\dfrac{x_2}{y_2-2}\left(y-2\right)=\dfrac{x_1}{y_1+2}\left(y+2\right)$，解得 $y=\dfrac{2kx_1x_2+2x_1+6x_2}{3x_2-x_1}$.

$$y-1=\frac{2kx_1x_2+2x_1+6x_2}{3x_2-x_1}-1=\frac{2kx_1x_2+3\left(x_1+x_2\right)}{3x_2-x_1}=\frac{\dfrac{48k}{2k^2+1}+3\left(-\dfrac{16k}{2k^2+1}\right)}{3x_2-x_1}=0,$$

$\therefore y=1$，$\therefore$点 T 在直线 $y=1$ 上. ……………………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：(1) 当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)=\left(x-2\right)e^x+\left(x+2\right)$，$f'\left(x\right)=\left(x-1\right)e^x+1$.

令 $g\left(x\right)=f'\left(x\right)=\left(x-1\right)e^x+1$，$g'\left(x\right)=xe^x$.

当 $x\in\left(-\infty,0\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$；当 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，$g'\left(x\right)>0$.

$\therefore g\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调递减，在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

$\therefore g\left(x\right)\geq g\left(0\right)=f'\left(0\right)=0$，即 $f'\left(x\right)\geq 0$，$\therefore f\left(x\right)$ 在 R 上是增函数.

又$\because f\left(0\right)=0$，$\therefore f\left(x\right)$ 在 R 上有唯一一个零点 $x=0$. ……………………………5 分

(2) 当 $x=-2$ 时，$f\left(x\right)<0$，$a\in\mathrm{R}$.

$f\left(x\right)=\left(x-2\right)e^x+a\left(x+2\right)\leq 0$，即 $a\left(x+2\right)\leq\left(2-x\right)e^x$. 当 $x\in\left(-2,1\right]$ 时，$a\leq\dfrac{\left(2-x\right)e^x}{x+2}$.

令 $F\left(x\right)=\dfrac{2-x}{x+2}e^x$，$F'\left(x\right)=\left(\dfrac{2-x}{x+2}e^x\right)'=-\dfrac{x^2}{\left(x+2\right)^2}e^x\leq 0$，

$\therefore F(x)$在$(-2,1]$上单调递减，$F(x)$在$(-2,1]$上最小值为$F(1)=\frac{e}{3}$，$\therefore a\le\frac{e}{3}$.

当$x\in[-4,-2)$时，$a\ge\frac{(2-x)e^x}{x+2}$.

$\therefore F(x)$在$[-4,-2)$上单调递减，$F(x)$在$[-4,-2)$上最大值为$F(-4)=-\frac{3}{e^4}$，$\therefore a\ge-\frac{3}{e^4}$.

综上得，$-\frac{3}{e^4}\le a\le\frac{e}{3}$，即满足条件的实数$a$的取值范围为$\left[-\frac{3}{e^4},\frac{e}{3}\right]$. ……………………………12 分

22.（本小题满分 10 分）

解：(1) 由$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t^{\frac{1}{4}}-t^{-\frac{1}{4}}\right),\\ y=\sqrt{2}\left(t^{\frac{1}{4}}+t^{-\frac{1}{4}}\right)\end{cases}$得$\begin{cases}\sqrt{2}x=t^{\frac{1}{4}}-t^{-\frac{1}{4}},\\ \frac{1}{\sqrt{2}}y=t^{\frac{1}{4}}+t^{-\frac{1}{4}}.\end{cases}$两式平方相减得$\frac{1}{2}y^2-2x^2=4$，即$\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{2}=1$.

又$\because y=\sqrt{2}\left(t^{\frac{1}{4}}+t^{-\frac{1}{4}}\right)\ge2\sqrt{2}$，$\therefore$曲线$C_1$直角坐标方程为$\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{2}=1\left(y\ge2\sqrt{2}\right)$.

曲线C_2：$\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}=0$，$\rho\sin\theta-\rho\cos\theta-4=0$，即$y-x-4=0$，

$\therefore$曲线C_2的直角坐标方程为$x-y+4=0$. ……………………………5 分

(2) 设曲线C_2的参数方程为$\begin{cases}x=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t.\end{cases}$（$t$为参数）.

代入曲线C_1方程得$\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2-4\left(-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2=8$，即$3t^2-20\sqrt{2}t+40=0$.

$\Delta=320>0$，设方程的两个实数根为t_1，t_2，则$t_1+t_2=\frac{20\sqrt{2}}{3}$，$t_1t_2=\frac{40}{3}$，

$$\therefore\left|\frac{1}{|MA|}-\frac{1}{|MB|}\right|=\left|\frac{1}{|t_1|}-\frac{1}{|t_2|}\right|=\frac{\left||t_2|-|t_1|\right|}{|t_1|\cdot|t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1|\cdot|t_2|}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1|\cdot|t_2|}=\frac{\frac{8\sqrt{5}}{3}}{\frac{40}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$\therefore\frac{1}{|MA|}-\frac{1}{|MB|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$或$-\frac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………10 分

23.（本小题满分 10 分）

证明：(1) 由a，b，c都是正数得，$3=a+b+c\ge3\sqrt[3]{abc}$，$\therefore\sqrt[3]{abc}\le1$，即$abc\le1$，

$\therefore\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{3}{abc}\ge3$，即$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\ge3$（当且仅当$a=b=c=1$等号成立）. ……5 分

(2) $\because\frac{2}{a+\sqrt{bc}}+\frac{2}{b+\sqrt{ac}}+\frac{2}{c+\sqrt{ab}}\ge\frac{4}{2a+b+c}+\frac{4}{2b+a+c}+\frac{4}{2c+a+b}=\frac{4}{a+3}+\frac{4}{b+3}+\frac{4}{c+3}$，

又$\because a+b+c=3$，$(a+3)+(b+3)+(c+3)=12$，

$$\therefore\frac{4}{a+3}+\frac{4}{b+3}+\frac{4}{c+3}=\frac{4}{12}\left[(a+3)+(b+3)+(c+3)\right]\left(\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}\right)$$

$$\ge\frac{1}{3}\left[\sqrt{a+3}\cdot\sqrt{\frac{1}{a+3}}+\sqrt{b+3}\cdot\sqrt{\frac{1}{b+3}}+\sqrt{c+3}\cdot\sqrt{\frac{1}{c+3}}\right]^2=3$$

$\therefore\frac{2}{a+\sqrt{bc}}+\frac{2}{b+\sqrt{ac}}+\frac{2}{c+\sqrt{ab}}\ge3$（当且仅当$a=b=c=1$等号成立）. ……………………………10 分